

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Curvatura discreta: i Grafi Platonici

Relatore:
Prof. Paolo DAI PRA

Laureando:
1047803
Jacopo BORGA

14 Ottobre 2015

"[...] essendovi ancora una quinta combinazione, il Dio se ne servì per decorare l'universo. Se qualcuno, riflettendo con attenzione su tutto quello che è stato detto, non riuscisse a decidersi se conviene dire che i mondi sono illimitati oppure limitati, potrebbe effettivamente ritenere che il pensarli di numero illimitato sia proprio di chi conosce in modo limitato ciò che occorre sapere senza limiti; mentre sul fatto che sia più conveniente affermare che esso è uno solo o siano stati veramente generati nel numero di cinque, a buon diritto dubiterebbe chi ponesse tale dubbio. Noi suggeriamo che, secondo verosimiglianza, ne sia stato generato uno solo; un altro, in base ad altre considerazioni, può pensarla in un altro modo."

Platone, Timeo

Indice

Introduzione	7
1 Processi di Markov	9
1.1 Processi di Markov a tempo continuo	9
1.2 Semigruppì di Markov	11
1.3 Generatori di processi di Markov discreti	12
1.4 Distribuzioni invarianti ed ergodicit�	13
1.5 Processi di Markov Reversibili	16
2 Disuguaglianze funzionali	17
2.1 Distanza dall'equilibrio	17
2.2 Disuguaglianze funzionali	18
2.2.1 Disuguaglianza di Poincar�	19
2.2.2 Disuguaglianza logaritmica di Sobolev modificata	21
2.2.3 Disuguaglianza logaritmica di Sobolev	23
2.3 Gerarchia delle disuguaglianze funzionali	23
3 Curvatura dei grafi	27
3.1 Preliminari	27
3.2 Curvatura di un grafo	29
3.3 Upper e lower bounds	30
4 Curvatura dei grafi platonici	33
4.1 Cubo	33
4.2 Tetraedro	35
4.3 Ottaedro	36
4.4 Icosaedro	38
4.5 Dodecaedro	41
Bibliografia	47

Introduzione

Nel seguente testo ci occuperemo di un argomento di estrema attualità, ancora oggi oggetto di ricerca, ovvero quello di fornire una definizione di curvatura discreta di grafi e di presentarne il calcolo in alcuni casi particolari. Il principale testo di riferimento è il recente articolo [1] pubblicato agli inizi del 2015 in cui viene introdotta una nuova definizione di curvatura discreta chiamata Curvatura di Bochner.

Metodo di lavoro

Il lavoro svolto è stato suddiviso principalmente in tre parti. All'inizio l'autore si è dedicato a recuperare ed acquisire delle conoscenze preliminari principalmente riguardanti le catene di Markov a tempo continuo e le disuguaglianze funzionali; successivamente ha iniziato a leggere e comprendere l'articolo preso di riferimento, e come conclusione, si è occupato di calcolare la curvatura discreta dei cinque grafi platonici.

Originalità dei risultati presentati

I risultati ottenuti nel capitolo 4 sono stati dimostrati dall'autore stesso. Il lavoro è stato particolarmente motivato dalla curiosità e dal fascino che circonda questi speciali grafi e dal tentativo di comprendere le reali difficoltà presenti nel calcolo di tali curvature. Uno speciale ringraziamento va al Professor Paolo Dai Pra per i consigli ed il tempo dedicato senza i quali il lavoro sarebbe stato irrealizzabile.

Nota introduttiva

Gran parte delle nozioni preliminari, necessarie per la completa comprensione degli argomenti trattati, non sono state inserite in un capitolo a parte, ma verranno citate come "osservazioni" all'interno del testo per garantire una maggiore scorrevolezza nella lettura. I risultati del primo capitolo riguardante i processi di Markov verranno presentati senza alcuna dimostrazione non essendo di centrale importanza nel lavoro di tesi svolto, pur essendo estremamente necessari per poter comprendere le successive trattazioni.

Capitolo 1

Processi di Markov

1.1 Processi di Markov a tempo continuo

Sia (E, \mathcal{E}) uno spazio misurabile, (Ω, \mathcal{F}, P) uno spazio di probabilità e

Definizione 1.1.1. Una famiglia di variabili aleatorie $X = (X_t, t \in I)$ su (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in (E, \mathcal{E}) è detto **processo stocastico** a valori in E con insieme dei tempi I .

Definizione 1.1.2. Siano (E_1, \mathcal{E}_1) e (E_2, \mathcal{E}_2) spazi misurabili. Una mappa $K : E_1 \times \mathcal{E}_2 \rightarrow [0, 1]$ è detta **kernel stocastico** se:

1. $x \mapsto K(x, A)$ è \mathcal{E}_1 -misurabile per ogni $A \in \mathcal{E}_2$;
2. $A \mapsto K(x, A)$ è una probabilità su (E_2, \mathcal{E}_2) per ogni $x \in E_1$.

Equivalentemente un kernel stocastico è una mappa che ad ogni punto $x \in E_1$ associa una probabilità $K(x, \cdot)$ su (E_2, \mathcal{E}_2) tale che per ogni insieme misurabile $A \in \mathcal{E}_2$ la mappa $x \mapsto K(x, A)$ è misurabile rispetto alla σ -algebra \mathcal{E}_1 .

Esempio 1

Prendiamo $E_1 = E_2 = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Definiamo per ogni $x \in \mathbb{Z}$, per ogni $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$K(x, A) := \frac{1}{2}\delta_{x-1}(A) + \frac{1}{2}\delta_{x+1}(A).$$

K è kernel stocastico e descrive la regola di transizione di una passeggiata aleatoria semplice su \mathbb{Z} .

D'ora in poi consideriamo $I \subseteq [0, \infty)$ chiuso rispetto all'addizione, $0 \in I$ e assumiamo che $(X_t)_{t \in I}$ sia un processo stocastico rispetto alla filtrazione

\mathcal{F}_t tale che $\bigcup_{t \in I} \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ (generalmente si avrà: $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s | s \leq t\}$; $\bigcup_{t \in I} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$).

Definizione 1.1.3. Un processo stocastico $X = (X_t)$ è detto **processo di Markov a tempo omogeneo** con distribuzione $(P_x)_{x \in E}$ sullo spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) se:

1. Per ogni $x \in E$, X è processo stocastico sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ con $P_x[X_0 = x] = 1$, ovvero stiamo affermando che P_x determina una condizione iniziale x ;
2. La mappa $K : E \times \mathcal{B}(E^I) \rightarrow [0, 1]$, $(x, B) \mapsto P_x[X \in B]$ è kernel stocastico;
3. X ha la proprietà di Markov omogenea nel tempo, ovvero per ogni $A \in \mathcal{B}(E)$, ogni $x \in E$ e ogni $s, t \in I$

$$P_x[X_{s+t} \in A | \mathcal{F}_s] = K_t(X_s, A), \quad P_x - q.c.$$

dove per ogni $t \in I$ il kernel stocastico $K_t : E \times \mathcal{B}(E) \rightarrow [0, 1]$ è definito da

$$K_t(x, A) := K(x, \{y \in E^I : y(t) \in A\}) = P_x[X_t \in A].$$

La famiglia $\{K_t(x, A), t \in I, x \in E, A \in \mathcal{B}(E)\}$ è anche detta la famiglia delle **probabilità di transizione** di X .

Sorge spontaneo un parallelismo con le catene di Markov, infatti K_t svolge il ruolo nella teoria generale dei processi di Markov, della matrice di transizione nelle catene di Markov. K_t è la proiezione di K all'istante t .

È sufficiente descrivere la famiglia dei kernel stocastici con le sue caratteristiche per determinare il processo di Markov stesso come mostra il seguente risultato.

Definizione 1.1.4. Una famiglia $\{K_t, t \in I\}$ di kernel stocastici è detta **semigrupo di kernel stocastici** da E in E se:

$$K_0(x, \cdot) = \delta_x(\cdot), \quad \text{per ogni } x \in E \quad (\text{equivalentemente } P_x[X_0 = x] = 1),$$

e soddisfa l'equazione di Chapman-Kolmogorov:

$$K_s * K_t = K_{s+t}, \quad \text{per ogni } s, t \in I,$$

dove $*$ è l'operatore di convoluzione.

Forniamo una breve interpretazione della precedente definizione.

$$K_s * K_t(z) = \int_E K_t(z - y) K_s(y) dy,$$

e nel caso in cui E sia un insieme discreto si ha

$$K_s * K_t(z) = \sum_{y \in E} P_x[X_t = z - y] P_x[X_s = y],$$

$$K_{s+t}(z) = P_x[X_{s+t} = z].$$

Stiamo affermando che la probabilità di transizione da x a z in $(s+t)$ tempo è uguale alla somma delle probabilità di transizione da x a y in tempo s e da y a z in tempo t .

Teorema 1.1.1. *Sia $(K_t)_{t \in I}$ un semigruppato di kernel stocastici da E in E . Allora esiste uno spazio misurabile (Ω, \mathcal{F}) e un processo di Markov $((X_t)_{t \in I}, (P_x)_{x \in E})$ su (Ω, \mathcal{F}) con probabilità di transizione:*

$$P_x[X_t \in A] = K_t(x, A), \text{ per ogni } x \in E, A \in \mathcal{B}(E), t \in I. \quad (1.1)$$

Viceversa, per ogni processo X , l'equazione (1.1) definisce un semigruppato di kernel stocastici. Inoltre le distribuzioni finito-dimensionali di X sono univocamente determinate.

1.2 Semigruppato di Markov

Sia E spazio metrico compatto misurabile rispetto alla σ -algebra di Borel $(\mathcal{E} = \mathcal{B}(E))$, $(X_t)_{t \in I}$ un processo di Markov con traiettorie càdlàg (ovvero continue da destra e limitate a sinistra) e $I = [0, \infty)$. Sia $\mathcal{C}(E)$ l'insieme delle funzioni continue su E , visto come spazio di Banach con la norma usuale

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|.$$

Dato un processo di Markov X a valori in E , per $f \in \mathcal{C}(E)$ scriveremo dove risulta definito

$$S(t)f(x) = E[f(X_t) | X_0 = x] = \int_E f(y) k_t(x, dy).$$

Definizione 1.2.1. Un processo di Markov X è detto **processo di Feller** se $S(t)f \in \mathcal{C}(E)$ per ogni $t \in I$ e $f \in \mathcal{C}(E)$.

Proposizione 1.2.1. *Supponiamo X un processo di Feller su E . Allora la collezione di operatori lineari $\{S(t), t \in I\}$ su $\mathcal{C}(E)$ ha le seguenti proprietà:*

1. $S(0) = I$, l'operatore identico su $\mathcal{C}(E)$;
2. la mappa $t \mapsto S(t)f$ da $[0, \infty)$ a $\mathcal{C}(E)$ è continua da destra per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$;
3. $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$ e per ogni $s, t \geq 0$;

4. $S(t)1=1$ per ogni $t \geq 0$;
 5. $S(t)f \geq 0$ per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$ non negativa.

Definizione 1.2.2. Una famiglia $\{S(t), t \geq 0\}$ di operatori lineari su $\mathcal{C}(E)$ è detta **semigruppato di Markov** se soddisfa le condizioni 1-5 della proposizione 1.2.1.

L'importanza dei semigruppato di Markov risiede nel fatto che ognuno corrisponde ad un processo di Markov, come mostra la seguente inversione della proposizione 1.2.1. Quindi la costruzione di un processo di Feller si riduce alla costruzione del corrispondente semigruppato.

Teorema 1.2.2. Supponiamo $\{S(t), t \geq 0\}$ sia un semigruppato di Markov su $\mathcal{C}(E)$. Allora esiste un unico processo di Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ tale che:

$$S(t)f(x) = E_x[f(X_t)] = E[f(X_t)|X_0 = x],$$

per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$, $x \in E$ e $t \geq 0$.

1.3 Generatori di processi di Markov discreti

Nei prossimi paragrafi lo spazio E sarà numerabile, perché è questo il caso in cui verrà applicato il modello delle disuguaglianze funzionali per lo studio della convergenza. Siano $x, y \in E$ con $x \neq y$. Definiamo

$$L_{x,y} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} P_x[X_t = y],$$

con l'assunzione che $L_{x,y}$ esista per ogni $x \neq y$ e che per ogni $x \in E$

$$\sum_{y:y \neq x} L_{x,y} < \infty. \quad (1.2)$$

Inoltre poniamo

$$L_{x,x} := - \sum_{y:y \neq x} L_{x,y}, \quad (1.3)$$

e con questa condizione otteniamo

$$L_{x,y} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_x[X_t = y] - \mathbb{1}_{\{x=y\}}). \quad (1.4)$$

Definizione 1.3.1. Se valgono (1.2),(1.3),(1.4) allora $(L_{x,y})_{x,y \in E}$ è detto il **generatore** del processo di Markov X .

Teorema 1.3.1. Sia L una matrice $E \times E$ tale che $L_{x,y} \geq 0$ per ogni $x, y \in E$ con $x \neq y$. Si assuma valgano (1.2),(1.3) e che $\lambda := \sup_{x \in E} |L_{x,x}|$. Allora L è il generatore di un unico processo di Markov X .

Essendo $S(t)$ un operatore lineare da $\mathcal{C}(E)$ a $\mathcal{C}(E)$ può essere rappresentato come una matrice $((S_t)_{x,y})_{x,y \in E}$ con:

$$(S_t)_{x,y} = P(X_t = y | X_0 = x),$$

quindi se X è un processo di Markov con semigruppato di Markov corrispondente S_t , sotto le ipotesi del teorema 1.3.1 segue che:

$$L = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (S_t - I),$$

ed essendo

$$\frac{S_{\bar{t}+t} - S_{\bar{t}}}{t} = S_{\bar{t}} \frac{S_t - I}{t} = \frac{S_t - I}{t} S_{\bar{t}},$$

passando al limite per $t \rightarrow 0$

$$\dot{S}_{\bar{t}} = S_{\bar{t}} L = L S_{\bar{t}},$$

la cui soluzione è

$$S_{\bar{t}} = e^{\bar{t}L}.$$

Viceversa, L può essere visto come un operatore lineare su $\mathcal{C}(E)$ attraverso

$$Lf(x) = \sum_{y \in E} L_{x,y} f(y) = \sum_{y: y \neq x} L_{x,y} [f(y) - f(x)],$$

dove l'ultima uguaglianza discende dalla proprietà (1.3).

1.4 Distribuzioni invarianti ed ergodicità

Supponiamo $(S(t))_{t \geq 0}$ sia un semigruppato di Markov su $\mathcal{C}(E)$. Data una misura μ su (E, \mathcal{E}) , sia $\mu S(t)$ la misura definita sullo stesso spazio misurabile dalla relazione

$$\begin{aligned} \int_E f d[\mu S(t)] &:= \int_E S(t) f d\mu = \sum_{x \in E} \mu(x) S(t) f(x) \\ &= \sum_{x \in E} \mu(x) E_x[f(X_t)] \\ &= \sum_{x,y \in E} \mu(x) (S_t)_{x,y} f(y) \\ &= \mu S_t f, \end{aligned}$$

per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$. In particolare se μ è una misura di probabilità, $\mu S(t)$ può essere interpretata come la distribuzione al tempo t del processo quando la distribuzione iniziale è μ .

Definizione 1.4.1. Una misura μ si dice **invariante** per il processo con semigruppato di Markov $(S(t))_{t \geq 0}$ se $\mu S(t) = \mu$ per ogni $t \geq 0$. Una **distribuzione invariante** è una misura di probabilità invariante.

Chiaramente se esiste una misura invariante $\mu = (\mu(x))_{x \in E}$ che soddisfa la condizione $Z_\mu := \sum_{x \in E} \mu(x) < \infty$, una distribuzione invariante è data da

$$\pi(x) = \frac{\mu(x)}{Z_\mu}, \text{ per ogni } x \in E.$$

Equivalentemente μ è una misura invariante per il processo con generatore L se e solo se

$$\sum_{x \in E} \mu(x) L_{x,y} = \mu L = 0, \text{ per ogni } y \in E.$$

Proposizione 1.4.1. Sia I la classe di tutte le distribuzioni invarianti per un processo con semigruppato di Markov $(S(t))_{t \geq 0}$. Allora:

1. $\pi \in I$ se e solo se $\int S(t) f d\pi = \int f d\pi$ per ogni $f \in \mathcal{C}(E)$ e per ogni $t \geq 0$;
2. I è sottoinsieme connesso compatto di \mathcal{P} , l'insieme di tutte le misure di probabilità su I ;
3. Se $\pi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_0 S(t)$ esiste per qualche $\pi_0 \in \mathcal{P}$ allora $\pi \in \mathcal{P}$;
4. Se $\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \pi_0 S(t) dt$ esiste per qualche $\pi_0 \in \mathcal{P}$ allora $\pi \in I$.

La seguente caratterizzazione descrive la miglior situazione che si può avere relativamente alla convergenza di $\pi_0 S(t)$ quando t tende a $+\infty$.

Definizione 1.4.2. Il processo di Markov con semigruppato $(S_t)_{t \geq 0}$ è detto **ergodico** se:

1. $I = \{\pi\}$ è un singoletto;
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \pi_0 S(t) = \pi$ per ogni $\pi_0 \in \mathcal{P}$.

Le seguenti proprietà dei processi di Markov sono utili per investigare l'ergodicità.

Definizione 1.4.3. Un processo di Markov con generatore L è detto **irriducibile** se per ogni $x, y \in E$, $x \neq y$, esiste un sottoinsieme $\{x_0, \dots, x_n\}$ con $x_0 = x$ e $x_n = y$, tale che $x_k \neq x_{k+1}$ e $L_{x_k, x_{k+1}} \neq 0$ per ogni $k = 0, \dots, n$.

Definizione 1.4.4. Dato un processo di Markov X , uno stato $x \in E$ è detto **ricorrente** se

$$P(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ è illimitato} \mid X_0 = x) = 1,$$

ed è detto **transitorio** se

$$P(\{t \geq 0 : X_t = x\} \text{ è illimitato} \mid X_0 = x) = 0.$$

Si definisce il primo istante di passaggio allo stato $y \in E$ iniziando dallo stato $x \in E$ come

$$T_{x,y} := \inf\{t \geq J_1 : X_t = y\},$$

dove J_1 è il tempo del primo salto $J_1 := \inf\{t \geq 0 : X_t \neq X_0\}$ e poniamo $T_x := T_{x,x}$. Uno stato $x \in E$ è ricorrente se e solo se $P(T_x < \infty) = 1$ perché solo in questo modo lo stato viene visitato infinite volte P-quasi certamente.

Definizione 1.4.5. Uno stato ricorrente $x \in E$ è detto **positivo-ricorrente** se $E[T_x] < \infty$ ed è detto **nullo-ricorrente** se $E[T_x] = \infty$.

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 1.4.2. Sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di Markov irriducibile e ricorrente (per ogni $x \in E$) con generatore L allora:

1. Ogni stato $x \in E$ è positivo-ricorrente oppure ogni stato $x \in E$ è nullo-ricorrente (il processo può essere chiamato rispettivamente positivo-ricorrente o nullo-ricorrente);
2. $(X_t)_{t \geq 0}$ è positivo-ricorrente se e solo se ha un'unica distribuzione invariante $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$, in ogni caso $\pi(x) > 0$ e

$$\pi(x) = -\frac{1}{E[T_x]L_{x,x}},$$

per ogni $x \in E$.

Teorema 1.4.3. Se una catena di Markov è irriducibile esiste al massimo una distribuzione stazionaria π . Quando esiste $\pi(x) > 0$ per ogni $x \in E$ e per ogni misura di probabilità π_0 su (E, \mathcal{E})

$$\pi = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0 S(t),$$

dove il limite rappresenta la convergenza debole di misure.

Da questi risultati segue che l'irriducibilità e la positivo-ricorrenza sono condizioni sufficienti per l'ergodicità di un processo di Markov. Per un processo ergodico vale il seguente risultato a lungo tempo.

Teorema 1.4.4. Sia X un processo di Markov ergodico con generatore L e distribuzione invariante $\pi = (\pi(x))_{x \in E}$. Per ogni stato $x \in E$ e per ogni distribuzione iniziale π_0 :

1.

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=x\}} ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(x);$$

2.

$$\frac{1}{t} E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=x\}} ds\right] = \frac{1}{t} \int_0^t P(X_s = x) ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \pi(x).$$

1.5 Processi di Markov Reversibili

L'approccio di Bochner-Backry-Emery allo studio della convergenza ergodica si applica a quei processi di Markov che sono reversibili con rispetto della misura invariante, e questo ad esempio è il caso dei tanto studiati sistemi di spin ergodici.

Definizione 1.5.1. Un processo di Markov con generatore L è detto **reversibile** con rispetto della distribuzione π se la condizione

$$\pi(x)L_{x,y} = \pi(y)L_{y,x}, \quad (1.5)$$

vale per ogni $x, y \in E$.

L'equazione (1.5) è spesso conosciuta come **condizione del bilancio dettagliato**, essendo un sottocaso della **condizione del bilancio generale**

$$\sum_{y \in E} \pi(y)L_{y,x} = 0, \text{ per ogni } x \in E,$$

ovvero la condizione di stazionarietà con rispetto della misura di probabilità π . L'equazione del bilancio dettagliato è più restrittiva della condizione del bilancio generale e dalla prima si deriva la seconda:

$$\sum_{y \in E} \pi(x)L_{y,x} = \sum_{y \in E} \pi(x)L_{x,y} = \pi(x) \sum_{y \in E} L_{x,y} = 0,$$

per ogni $x \in E$, e quindi la reversibilità con rispetto di una distribuzione implica la stazionarietà con rispetto della stessa distribuzione.

Proposizione 1.5.1. *La condizione del bilancio dettagliato per un processo di Markov X è equivalente a ognuna delle seguenti proprietà:*

1. *Per ogni $x_0, x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N}$ e ogni tempo fissato $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$*

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, X_{t_1} = x_1, \dots, X_T = x_n) = \\ = P(X_0 = x_n, X_{T-t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_T = x_0), \end{aligned}$$

o equivalentemente per ogni fissato tempo $T, (X_t)_{t \in [0, T]}$ e $(X_{T-t})_{t \in [0, T]}$ hanno la stessa distribuzione finito dimensionale;

2. *Per ogni tempo T , se $(X_t)_{t \in [0, T]}$ è una catena di Markov stazionaria con rispetto di π e generatore L , allora anche $(X_{T-t})_{t \in [0, T]}$ è una catena di Markov stazionaria con rispetto della stessa distribuzione π e con lo stesso generatore L ;*
3. *Il generatore di Markov di X è un operatore simmetrico in $L^2(\pi)$.*

Capitolo 2

Disuguaglianze funzionali

2.1 Distanza dall'equilibrio

Definiamo

$$\pi[f] := \sum_{x \in E} f(x)\pi(x),$$

per ogni $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ e ogni misura di probabilità π su E . Dato un processo di Markov ergodico con semigruppato di Markov S_t e distribuzione invariante π , il teorema Ergodico stabilisce che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_t f(x) = \pi[f].$$

Definizione 2.1.1. Date due misure di probabilità π e μ su (E, \mathcal{E}) , la **distanza in variazione totale** tra le due distribuzioni è definita come:

$$\|\mu - \pi\|_{TV} := \sum_{x \in E} |\mu(x) - \pi(x)|.$$

La distanza in variazione totale è la quantità più naturale per stimare la distanza di una misura di probabilità dalla distribuzione invariante, ma è spesso utile confrontarla con il seguente ulteriore modello di convergenza.

Definizione 2.1.2. Consideriamo lo spazio $L^2(\pi)$ con la norma usuale

$$\|f\|_2 := (\pi[f^2])^{\frac{1}{2}}.$$

Risulta definita la seguente misura di distanza dall'equilibrio

$$\|S_t - \pi\|_{2 \rightarrow 2} := \sup\{\|S_t f - \pi[f]\|_2 : \|f\|_2 = 1\}.$$

Definizione 2.1.3. Data una probabilità su (E, \mathcal{E}) , l'**entropia relativa** di μ con rispetto della misura invariante π è definita

$$h(\mu|\pi) := \sum_{x \in E} \pi(x) \left(\frac{\mu(x)}{\pi(x)} \log \frac{\mu(x)}{\pi(x)} \right) = \pi \left[\frac{\mu}{\pi} \log \frac{\mu}{\pi} \right].$$

L'entropia per le funzioni non negative $f \geq 0$ è definita

$$Ent_\pi(f) := \pi[f \log f] - \pi[f] \log(\pi[f]),$$

e quindi

$$h(\mu|\pi) = Ent_\pi\left(\frac{\mu}{\pi}\right),$$

dove si è utilizzato il fatto che $\pi\left[\frac{\mu}{\pi}\right] \log(\pi\left[\frac{\mu}{\pi}\right]) = \sum_{x \in E} \mu(x) \log(\sum_{y \in E} \mu(y)) = \sum_{x \in E} \mu(x) \log(1) = 0$.

Queste due nozioni sono strettamente connesse a quella di distanza in variazione totale. Innanzitutto notiamo che

$$\begin{aligned} \|\mu S_t - \pi\|_{TV} &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E} \left| \mu S_t(x) - \pi(x) \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in E} \left| \sum_{y \in E} \mu(y) (\delta_y S_t)(x) - \pi(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{y \in E} \mu(y) \sum_{x \in E} \left| (\delta_y S_t)(x) - \pi(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{y \in E} \sum_{x \in E} \left| \delta_y S_t(x) - \pi(x) \right|. \end{aligned}$$

Si può mostrare che

$$\max_{x \in E} \|\delta_x S(t) - \pi\|_{TV} \leq \frac{1}{\pi^*} \|S_t - \pi\|_{2 \rightarrow 2},$$

dove $\pi^* := \min_{x \in E} \pi(x)$. Quindi dalla velocità di convergenza a zero di $\|S_t - \pi\|_{2 \rightarrow 2}$ può essere derivata una stima della velocità di convergenza all'equilibrio in variazione totale, nonostante, per spazi degli stati numerosi, π^* potrebbe essere molto piccolo. Per quanto riguarda l'entropia relativa, dalla disuguaglianza di Jensen è semplice dimostrare che $h(\mu|\pi) \geq 0$ e $h(\mu|\pi) = 0$ se e solo se $\pi = \mu$. Inoltre vale la disuguaglianza di Pinsker-Csiszár-Kullback:

$$\|\mu - \pi\|_{TV} \leq \sqrt{h(\mu|\pi)}.$$

2.2 Disuguaglianze funzionali

Un nozione chiave per trovare dei bounds per la velocità di convergenza delle quantità precedentemente definite è quella di **forma di Dirichlet**, definita da

$$\mathcal{E}(f, g) := - \sum_{x \in E} \left[\pi(x) f(x) \sum_{y \in E} L_{x,y} g(y) \right] = -\pi[f L g],$$

dove π è la distribuzione invariante del processo di Markov con generatore L , e f, g sono funzioni misurabili in E . Notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{y \in E} \pi[L_{x,y}(f(y) - f(x))^2] &= \frac{1}{2} \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \pi(x) L_{x,y}(f(y) - f(x))^2 \\ &= - \sum_{y \in E} \sum_{x \in E} \pi(x) L_{x,y} f(y) f(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{y \in E} f^2(y) \sum_{x \in E} \pi(x) L_{x,y} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{x \in E} \pi(x) f^2(x) \sum_{y \in E} L_{x,y}, \end{aligned}$$

dove il secondo e il terzo termine dell'ultima uguaglianza sono zero, rispettivamente per l'equazione del bilancio generale e per la condizione sul generatore del processo di Markov, quindi

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{y \in E} \pi[L_{x,y}(f(y) - f(x))^2].$$

Un calcolo molto simile mostra che

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2} \sum_{y \in E} \pi[L_{x,y}(f(y) - f(x))(g(y) - g(x))].$$

Nei prossimi paragrafi forniremo tre differenti condizioni che coinvolgono la forma di Dirichlet, i quali implicano la convergenza esponenziale alla distribuzione invariante di un processo di Markov.

2.2.1 Disuguaglianza di Poincaré

Consideriamo una funzione misurabile f e notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|S_t f - \pi[f]\|_2^2 &= \frac{d}{dt} \sum_{x \in E} \pi(x) (S_t f(x) - \pi[f])^2 \\ &= 2 \sum_{x \in E} \pi(x) (S_t f(x) - \pi[f]) \left(\frac{d}{dt} S_t f(x) \right) \\ &= 2 \sum_{x \in E} \pi(x) (S_t f(x) - \pi[f]) \sum_{y \in E} (L_{x,y} S_t f(y)) \\ &= 2 \sum_{x \in E} \pi(x) S_t f(x) \sum_{y \in E} (L_{x,y} S_t f(y)) \\ &\quad - 2 \sum_{x \in E} \pi(x) \pi[f] \sum_{y \in E} (L_{x,y} S_t f(y)), \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza è giustificata dalla relazione $\dot{S}_t = S_t L = L S_t$. Il secondo addendo dell'ultima uguaglianza è zero per l'equazione del bilancio generale, quindi si ha

$$\frac{d}{dt} \|S_t f - \pi[f]\|_2^2 = 2\pi[S_t f L S_t f] = -2\mathcal{E}(S_t f, S_t f).$$

L'idea è di interpretare la precedente identità come un disequazione differenziale per $\frac{d}{dt} \|S_t f - \pi[f]\|_2^2$. Definiamo

$$Var_\pi[f] := \pi[f^2] - \pi^2[f],$$

e supponiamo che ci sia una costante γ tale che valga la seguente disuguaglianza:

$$Var_\pi[f] \leq \frac{1}{\gamma} \mathcal{E}(f, f), \quad (\text{PI})$$

per ogni funzione misurabile f . Tale disuguaglianza è detta **Disuguaglianza di Poincaré**. Sotto l'ipotesi (PI), osserviamo che

$$\begin{aligned} \|f - \pi[f]\|_2^2 &= \pi[(f - \pi[f])^2] = \pi[f^2 + \pi^2[f] - 2f\pi[f]] \\ &= \pi[f^2] + \pi[\pi^2[f]] - 2\pi[f\pi[f]] \\ &= \pi[f^2] + \pi^2[f]\pi[1] - 2\pi[f]\pi[f] \\ &= \pi[f^2] - \pi^2[f] = Var_\pi[f], \end{aligned}$$

e quindi $\|S_t f - \pi[f]\|_2^2 = Var_\pi[S_t f]$,

$$\frac{d}{dt} \|S_t f - \pi[f]\|_2^2 = -2\mathcal{E}(S_t f, S_t f) \leq -2\gamma Var_\pi[S_t f] = -2\gamma \|S_t f - \pi[f]\|_2^2,$$

che implica

$$\|S_t f - \pi[f]\|_2^2 \leq e^{-2\gamma t} Var_\pi(f).$$

In particolare

$$\begin{aligned} \|S_t f - \pi[f]\|_2 &\leq e^{-\gamma t} (Var_\pi[f])^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\gamma t} (\pi[f^2] - \pi^2[f])^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{-\gamma t} (\pi[f^2])^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dalla crescita di $x^{\frac{1}{2}}$. Questo mostra che

$$\|S_t - \pi\|_{2 \rightarrow 2} \leq e^{-\gamma t},$$

e quindi

$$\max_{x \in E} \|\delta_x S_t - \pi\|_{TV} \leq \frac{1}{\pi^*} e^{-\gamma t}.$$

Con un po' di teoria spettrale si mostra che se L è reversibile, la maggiore costante γ per la quale vale (PI) è l'opposto del secondo maggior autovalore

di L (il maggiore è 0). Per questa ragione γ è chiamata **gap spettrale**. La stessa terminologia è utilizzata nel caso non reversibile, dove γ è il secondo maggior autovalore di $\frac{L+L^*}{2}$, definendo $L_{x,y}^* := \frac{L_{y,x}\pi(y)}{\pi(x)}$ come l'operatore aggiunto di L in $L^2(\pi)$. Inoltre, se γ è il gap spettrale si ha

$$\|S_t - \pi\|_{2 \rightarrow 2} = e^{-\gamma t}.$$

2.2.2 Disuguaglianza logaritmica di Sobolev modificata

Per il decadimento dell'entropia relativa si utilizza una tecnica simile alla precedente. Assumiamo per semplicità che il sistema sia reversibile e notiamo che, per ogni probabilità μ su E

$$\begin{aligned} h(\mu S_t | \pi) &= \pi \left[\frac{\mu S_t}{\pi} \log \left(\frac{\mu S_t}{\pi} \right) \right] \\ &= \sum_{x \in E} \pi(x) \left[\left(\sum_{y \in E} \frac{\mu(y)(S_t)_{y,x}}{\pi(x)} \right) \log \left(\sum_{y \in E} \left(\frac{\mu(y)(S_t)_{y,x}}{\pi(x)} \right) \right) \right] \\ &= \sum_{x \in E} \left[\left(\sum_{y \in E} (S_t)_{x,y} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \right) \log \left(\sum_{y \in E} (S_t)_{x,y} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \right) \right] \\ &= \pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \log \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \right] &= \sum_{x \in E} \pi(x) \sum_{y \in E} (S_t)_{x,y} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \\ &= \sum_{y \in E} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \sum_{x \in E} \pi(x) (S_t)_{x,y} \\ &= \sum_{y \in E} \frac{\mu(y)}{\pi(y)} \pi(y) \\ &= 1, \end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned} Ent_\pi(S_t \frac{\mu}{\pi}) &= \pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \log \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right) \right] - \pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \right] \log \left(\pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \right] \right) \\ &= \pi \left[S_t \frac{\mu}{\pi} \log \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right) \right] \\ &= h(\mu S_t | \pi), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che $\log(\pi[S_t \frac{\mu}{\pi}]) = \log(1) = 0$. Con qualche ulteriore calcolo otteniamo un'equazione differenziale simile a quella del precedente

paragrafo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Ent_\pi(S_t f) &= \frac{d}{dt} [\pi[S_t f \log(S_t f)] - \pi[S_t f] \log(\pi[S_t f])] \\
&= \pi[(LS_t f) \log(S_t f)] + \pi \left[\frac{S_t f}{S_t f} (LS_t f) \right] \\
&\quad - \pi[LS_t f] \log(\pi[S_t f]) - \frac{\pi[S_t f]}{\pi[S_t f]} \pi[LS_t f] \\
&= \pi[S_t f L \log(S_t f)] \\
&= -\mathcal{E}(S_t f, \log(S_t f)),
\end{aligned}$$

dove ancora una volta abbiamo utilizzato la relazione $\dot{S}_t = S_t L = LS_t$ e l'equazione del bilancio dettagliato. La disuguaglianza che ci permetterà di concludere è

$$Ent_\pi(f) \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{E}(f, \log f), \quad (\text{MLSI})$$

con $\alpha > 0$, per ogni $f > 0$ misurabile. Quest'ultima è chiamata **Disuguaglianza logaritmica di Sobolev modificata** ed implica che

$$\frac{d}{dt} Ent_\pi \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right) \leq -\alpha Ent_\pi \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right),$$

e quindi

$$Ent_\pi \left(S_t \frac{\mu}{\pi} \right) \leq e^{-\alpha t} Ent_\pi \left(\frac{\mu}{\pi} \right),$$

ricordando che $S_0 = \mathbb{1}$. In altri termini

$$h(\mu S_t | \pi) \leq e^{-\alpha t} h(\mu | \pi).$$

Il semplice fatto che $h(\delta_x | \pi) = \sum_{x \in E} \pi(x) \left(\frac{\delta_x(x)}{\pi(x)} \log \frac{\delta_x(x)}{\pi(x)} \right) = \log \left(\frac{1}{\pi(x)} \right)$ e la disuguaglianza di Pinsker-Csiszár-Kullback conducono al seguente risultato:

$$\begin{aligned}
\max_{x \in E} \|\delta_x S_t - \pi\|_{TV} &\leq \max_{x \in E} \sqrt{h(\delta_x S_t | \pi)} \leq \\
&\leq \max_{x \in E} \sqrt{e^{-\alpha t} h(\delta_x | \pi)} \\
&= e^{-\frac{\alpha t}{2}} \log^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\pi^*} \right).
\end{aligned}$$

Nel prossimo paragrafo dimostreremo che $\alpha \leq 2\gamma$, quindi la stima ottenuta attraverso la (MLSI) potrebbe essere peggiore in termini esponenziali, ma per tempi "piccoli" potrebbe essere nettamente migliore, essendo, per vasti insiemi E , $\log(\frac{1}{\pi^*}) \ll \frac{1}{\pi^*}$.

2.2.3 Disuguaglianza logaritmica di Sobolev

L'ultimo risultato per la convergenza ergodica è derivato a partire dalla **Disuguaglianza logaritmica di Sobolev**:

$$Ent_\pi(f) \leq \frac{1}{s} \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}), \quad (\text{LSI})$$

per ogni $f \geq 0$. La sua interpretazione in termini di velocità di convergenza all'equilibrio non è così lineare come per (PI) e (LSI), ma il risultato non banale che si può dimostrare è il seguente:

$$\max_{x \in E} \|\delta_x S_t - \pi\|_{TV} \leq \left(\log \left(\frac{1}{\pi^*} \right) \right)^{\frac{\gamma}{2s}} e^{-\gamma t}.$$

Quest'ultima migliora sicuramente

$$\max_{x \in E} \|\delta_x S_t - \pi\|_{TV} \leq \frac{1}{\pi^*} e^{-\gamma t},$$

ed è spesso migliore di

$$\max_{x \in E} \|\delta_x S_t - \pi\|_{TV} \leq \log^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\pi^*} \right) e^{-\frac{\alpha t}{2}},$$

nonostante verrà provato che $2s \leq \gamma$.

2.3 Gerarchia delle disuguaglianze funzionali

Le tre disuguaglianze funzionali introdotte possono essere opportunamente ordinate. In particolare vale il seguente risultato:

Proposizione 2.3.1. *Per ogni $f > 0$*

$$\mathcal{E}(f, \log f) \geq 2\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}),$$

e se il processo è reversibile il lower bound può essere migliorato da

$$\mathcal{E}(f, \log f) \geq 4\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}).$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che per ogni $a, b > 0$

$$b(\log(a) - \log(b)) \leq 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}),$$

che può essere semplicemente mostrato ponendo $t = \frac{a}{b} > 0$

$$b(\log(a) - \log(b)) \leq 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \Leftrightarrow g(t) := 2\sqrt{t} - 2 - \log t \geq 0, \quad \forall t > 0,$$

e $g(t)$ ha un minimo globale per $t = 1$ in $(0, +\infty)$ con $g(1) = 0$. Utilizzando la precedente disuguaglianza:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f, \log f) &= - \sum_{x \in E} \pi(x) f(x) \sum_{y \in E} L_{x,y} [\log f(y) - \log f(x)] \\ &\geq -2 \sum_{x \in E} \pi(x) \sqrt{f(x)} \sum_{y \in E} L_{x,y} [\sqrt{f(y)} - \sqrt{f(x)}] \\ &= 2\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}).\end{aligned}$$

Nel caso reversibile la dimostrazione è simile, ma fa uso della seguente espressione per la forma di Dirichlet:

$$\mathcal{E}(f, \log f) = \sum_{x \in E} \pi(x) \sum_{y \in E} L_{x,y} [f(y) - f(x)] [\log f(y) - \log f(x)],$$

che può essere limitata dalla disuguaglianza

$$(\log a - \log b)(a - b) \geq 4(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

□

Teorema 2.3.2. *Consideriamo un processo di Markov irriducibile a stati finiti e siano γ , α e s le migliori costanti per (PI), (MLSI) e (LSI) rispettivamente. Allora*

$$s > 0 \quad \alpha, \gamma \geq 2s \quad 2\gamma \geq \alpha,$$

e per processi reversibili

$$2\gamma \geq \alpha \geq 4s.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza $\alpha \geq 2s$ ($\alpha \geq 4s$ nel caso reversibile) segue immediatamente dalla precedente proposizione. Per dimostrare che $2\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq 2s$, consideriamo una funzione g e definiamo, per $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon := (1 + \varepsilon g)^2$. Con semplici calcoli si mostra che

$$\begin{aligned}Ent_\pi(f_\varepsilon) &= 2\varepsilon^2 Var_\pi(g) + o(\varepsilon^2), \\ \mathcal{E}(\sqrt{f_\varepsilon}, \sqrt{f_\varepsilon}) &= \varepsilon^2 \mathcal{E}(g, g), \\ \mathcal{E}(f_\varepsilon, \log f_\varepsilon) &= 4\varepsilon^2 \mathcal{E}(g, g) + o(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

quindi

$$\frac{1}{\varepsilon^2} Ent_\pi(f_\varepsilon) \leq \frac{1}{\alpha \varepsilon^2} \mathcal{E}(f_\varepsilon, \log f_\varepsilon), \quad (\text{MLSI})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e allora

$$2Var_\pi(g) \leq \frac{4}{\varepsilon} \mathcal{E}(g, g) \implies 2\gamma \geq \alpha.$$

In maniera analoga si dimostra la disuguaglianza $\gamma \geq 2s$. Ci resta da dimostrare che per una catena di Markov a stati finiti irriducibile, $s > 0$ che implica $\gamma, \alpha > 0$ dalla precedente disuguaglianza. Dalla definizione di (LSI)

$$s = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{Ent_\pi(f)} : f \geq 0, Ent_\pi(f) > 0 \right\},$$

ed essendo $\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f})$ e $Ent_\pi(f)$ entrambe continue e omogenee di grado uno ($f(\alpha x) = \alpha f(x)$),

$$s = \inf \left\{ \frac{\mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f})}{Ent_\pi(f)} : f \geq 0, Ent_\pi(f) = 1 \right\}.$$

Dall'irriducibilità $Ent_\pi(f) = 1 \Rightarrow f \neq \text{costante} \Rightarrow \mathcal{E}(\sqrt{f}, \sqrt{f}) > 0$. Inoltre, dal momento che E è finito, le f osservabili appartengono ad uno spazio finito dimensionale, ed è semplice dimostrare che $\{f : Ent_\pi(f) = 1\}$ è compatto. Quindi s è l'estremo inferiore di un insieme compatto di funzioni continue che sono strettamente positive: l'estremo inferiore è un minimo e quindi strettamente positivo. \square

È interessante sottolineare che per processi di Markov a stati infiniti le precedenti disuguaglianze valgono ancora ma la costante potrebbe essere zero.

Capitolo 3

Curvatura dei grafi

3.1 Preliminari

Innanzitutto ricordiamo alcune definizioni di base e nozioni standard.

Definizione 3.1.1. Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato. Inoltre assumiamo che G non abbia vertici isolati. Definiamo il **Laplaciano** del grafo $\Delta = \Delta(G) = -(D(G) - A(G))$, dove $D(G)$ è la matrice diagonale dei gradi dei vertici e $A(G)$ è la matrice di adiacenza di G .

Forniamo un esempio per chiarire la struttura di $D(G)$ e $A(G)$.

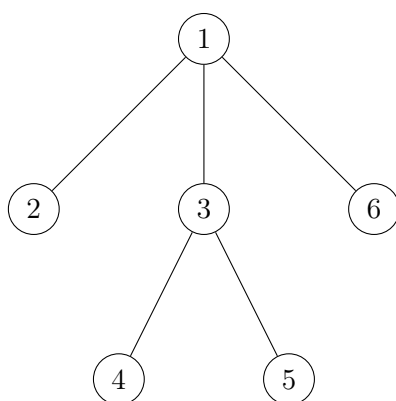


Figura 3.1: grafo d'esempio.

Esempio 2

In riferimento al grafo in figura 3.1 calcoliamo la matrice diagonale $D(G)$ con i gradi dei nodi e la matrice simmetrica $A(G)$ dei vicini.

$$D(G) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come un operatore, l'azione del Laplaciano su una funzione $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ può essere descritta come:

$$\Delta f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)),$$

dove la notazione $y \sim x$ significa che y è un vicino di x nel grafo e ovviamente la somma è solamente sulle y .

Possiamo interpretare l'azione dell'operatore Δ su f come il generatore di un processo di Markov, e nel caso specifico come generatore di una passeggiata aleatoria semplice sul grafo.

Date due funzioni $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo inoltre definire:

$$\Gamma(f, g)(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)). \quad (3.1)$$

Quest'ultima quantità può essere interpretata come una versione locale della ben nota forma di Dirichlet associata ad un grafo, infatti data una misura $\pi : V \rightarrow [0, \infty)$ e considerando il valore atteso (rispetto a π) della (3.1) otteniamo:

$$\mathcal{E}(f, g) := \frac{1}{2} \sum_x \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\pi(x).$$

Quando $f = g$, l'espressione (3.1) diventa:

$$\Gamma(f)(x) := \Gamma(f, f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y))^2.$$

Risulta utile definire

$$2\Gamma_2(f, g) = \Delta\Gamma(f, g) - \Gamma(f, \Delta g) - \Gamma(\Delta f, g),$$

e come da convenzione

$$\Gamma_2(f) := \Gamma_2(f, f) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma(f) - \Gamma(f, \Delta f).$$

3.2 Curvatura di un grafo

Ricordiamo innanzitutto la definizione di curvatura discreta fornita in [1].

Definizione 3.2.1. La curvatura (di Bochner) $\text{Ric}(G)$ di un grafo G è definita come il massimo valore K tale che, per ogni funzione f e vertice x , si ha

$$\Gamma_2(f)(x) \geq K\Gamma(f)(x). \quad (3.2)$$

Riportiamo di seguito il calcolo esplicito delle espressioni di $\Gamma(f)(x)$ e $\Gamma_2(f)(x)$ che verranno spesso utilizzate nelle successive dimostrazioni.

Sia $x \in V$, e sia $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Osserviamo immediatamente che la (3.2) è invariante rispetto all'aggiunta di una costante a f , quindi potremmo assumere $f(x) = 0$. Espandiamo $\Gamma(f)(x)$:

$$\Gamma(f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v).$$

Espandiamo $\Gamma_2(f)(x)$:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_2(f)(x) &= \Delta\Gamma(f)(x) - 2\Gamma(f, \Delta f)(x) \\ &= \sum_{v \sim x} \Gamma(f)(v) - d(x)\Gamma(f)(x) - \sum_{v \sim x} f(v)(\Delta f(v) - \Delta f(x)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{u \sim v \sim x} (f(u) - f(v))^2 - \frac{d(x)}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{v \sim x} f(v) \sum_{u \sim x} f(u) + \\ &\quad - \sum_{u \sim v \sim x} f(v)(f(u) - f(v)) \\ &= \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 - \frac{d(x)}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{u \sim v \sim x} \frac{f^2(u) - 4f(u)f(v) + 3f^2(v)}{2} \\ &= \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 - \sum_{v \sim x} \frac{d(x) + d(v)}{2} f^2(v) + \frac{1}{2} \sum_{u \sim v \sim x} (f(u) - 2f(v))^2. \end{aligned}$$

Ora, spezziamo l'ultimo termine nei seguenti casi: $u = x$, $u \sim x$ (indicheremo l'insieme di tali coppie (u, v) non ordinate con $\Delta(x, v, u)$ essendo che i vertici x, v, u formano un triangolo nel grafo), e $d(x, u) = 2$.

La precedente espressione è allora uguale a

$$\begin{aligned}
& 2\Gamma_2(f)(x) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + \sum_{v \sim x} \left(2 - \frac{d(x) + d(v)}{2} \right) f^2(v) \\
&\quad + \sum_{\Delta(x,v,u)} \frac{(f(v) - 2f(u))^2 + (f(u) - 2f(v))^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + \sum_{v \sim x} \left(\frac{4 - d(x) - d(v)}{2} \right) f^2(v) \\
&\quad + \sum_{\Delta(x,v,u)} \left[2(f(v) - f(u))^2 + \frac{1}{2}(f^2(v) + f^2(u)) \right].
\end{aligned}$$

L'ultima espressione ottenuta sarà il punto di partenza di gran parte delle dimostrazioni del capitolo 4.

3.3 Upper e lower bounds

Spesso nel calcolo della curvatura dei grafi andremo a cercare degli upper e dei lower bounds per la costante K , quindi ad esempio saremo interessati a minimizzare l'espressione di $\Gamma_2(f)(x)$.

Osservazione 1. Fissati i valori $f(v)$ per ogni vertice $v \sim x$, ci potremmo chiedere quale scelta di $f(u)$ (con $d(x, u) = 2$) minimizza l'espressione di $\Gamma_2(f)(x)$? Si potrebbe scegliere

$$f(u) = \frac{2}{r(u)} \sum_{x \sim v \sim u} f(v),$$

dove $r(u)$ è il numero di vicini in comune tra u ed x . È molto importante convincersi che una tale scelta permetterà di trovare un lower bound per la costante K , infatti tale ragionamento verrà spesso utilizzato nelle successive dimostrazioni. Cerchiamo ora di chiarire il perché di tale scelta. Per minimizzare $\Gamma_2(f)(x)$ una volta fissati i valori $f(v)$ per ogni vertice $v \sim x$ dovremmo scegliere degli opportuni valori da fissare per f sui secondi vicini di x . L'unico termine dell'espressione di $\Gamma_2(f)(x)$ che coinvolge i secondi vicini è $\frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2$. In particolare fissato un secondo vicino \bar{u} esso comparirà nella sommatoria in tanti fattori quanti sono i suoi vicini in comune con x . Allora posto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ l'insieme di tali vicini comuni si avrà un'espressione del tipo

$$(f(\bar{u}) - 2f(v_1))^2 + (f(\bar{u}) - 2f(v_2))^2 + \dots + (f(\bar{u}) - 2f(v_n))^2, \quad (3.3)$$

che assume un minimo in $f(\bar{u}) = \frac{2}{n}(f(v_1) + \dots + f(v_n))$. Tale minimo si trova derivando l'espressione (3.3) nella variabile $f(\bar{u})$.

Il seguente teorema fornisce invece un upper bound alla nozione di curvatura, che sarà utilizzato nella prossima sezione.

Teorema 3.3.1. *Sia $G = (V, E)$ un grafo. Se $e \in E$, $t(e)$ indica il numero di triangoli contenenti e . Definiamo $T := \max_e t(e)$. Allora $Ric(G) \leq 2 + \frac{T}{2}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in V$ un vertice di grado minimo d , e si consideri la funzione distanza (da x) $f(v) = d(v, x)$. È semplice calcolare che

$$2\Gamma_2(f)(x) = d^2 + \sum_{v \sim x} \left(2 - \frac{d + \deg(v)}{2} \right) + \sum_{\Delta(x,v,u)} 1 \leq 2d + \frac{dT}{2},$$

e che $\Gamma(f)(x) = \frac{1}{2}d$. Ogni valore di $K > 2 + \frac{T}{2}$ non soddisferà (3.2) per la funzione f nel vertice x , quindi $Ric \leq 2 + \frac{T}{2}$. \square

Capitolo 4

Curvatura dei grafi platonici

In questa sezione enunceremo 5 teoremi che caratterizzeranno la curvatura dei cinque grafi platonici. Gran parte delle seguenti dimostrazioni sono frutto del lavoro di tesi. In particolare nei teoremi 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 si fa riferimento a vari risultati presenti nell' articolo [1] che verranno riportati successivamente, mentre i teoremi 4.4.1, 4.5.3 sono stati completamente dimostrati dall'autore, come il teorema 4.5.2 caratterizzante il rapporto tra grafi di Cayley e grafi platonici.

4.1 Cubo

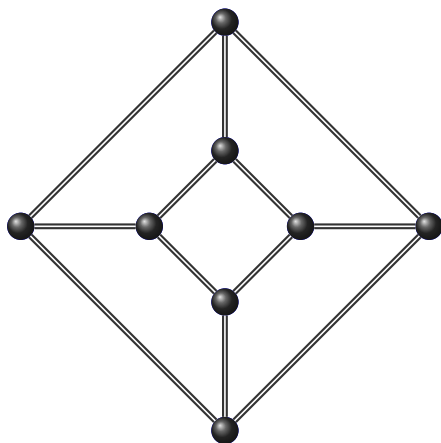


Figura 4.1: grafo del cubo.

Per poter comprendere la successiva dimostrazione sono necessari alcuni chiarimenti sulla struttura dell'ipercubo H_n .

Definizione 4.1.1. La **distanza di Hamming** tra due stringhe di ugual lunghezza è il numero di posizioni nelle quali i simboli corrispondenti so-

no diversi. In altri termini, la distanza di Hamming misura il numero di sostituzioni necessarie per convertire una stringa nell'altra.

Definizione 4.1.2. L'ipercubo n -dimensionale H_n è un grafo i cui vertici sono costituiti da stringhe di 0 e 1 di lunghezza n e due vertici sono adiacenti se la loro distanza di Hamming è uno.

Osservazione 2. Discendono immediatamente dalla definizione tre semplici proprietà di H_n :

1. $d(x) = n$ per ogni $x \in V$;
2. H_n non contiene triangoli;
3. Due nodi che distano 2 hanno esattamente due vicini in comune.

Teorema 4.1.1. Sia C il grafo rappresentante il cubo allora $Ric(C)=2$.

Dimostrazione. Il grafo del cubo è ovviamente isomorfo al grafo dell' ipercubo H_3 . Mostriamo che $Ric(H_n)=2$ se $n \geq 1$.

Per ogni vertice $x \in H_n$, e per ogni f tale che $f(x) = 0$, si ha dall'espressione di $2\Gamma_2(f)(x)$ fornita nell'introduzione

$$2\Gamma_2(f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{u: \\ d(x,u)=2}} \sum_{v: u \sim v \sim x} (f(u) - 2f(v))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + (2-n) \sum_{v \sim x} f^2(v).$$

Sia u un vertice a distanza 2 da x , e siano v e w i due vertici distinti tali che $u \sim v \sim x \sim w \sim u$, come fatto precedentemente notare nell'osservazione 2. Ora fissati i valori di $f(v)$ tali che $v \sim x$, per quanto detto nell'osservazione 1, $\Gamma_2(f)(x)$ è minimizzato da $f(u) = f(v) + f(w)$. Con questi valori

$$\sum_{v: u \sim v \sim x} (f(u) - 2f(v))^2 = \sum_{v: u \sim v \sim x} (f(w) - f(v))^2 = 2(f(v) - f(w))^2.$$

Sempre per quanto fatto notare nell'osservazione 2, per ogni coppia $v, w \sim x$ c'è un unico vertice u con $u \sim v, w$ e $d(x, u) = 2$,

$$2\Gamma_2(f)(x) \geq \sum_{\substack{v \neq w \\ v, w \sim x}} (f(v) - f(w))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + (2-n) \sum_{v \sim x} f^2(v).$$

Riscrivendo la precedente espressione si ha

$$\begin{aligned}
2\Gamma_2(f)(x) &\geq \sum_{\substack{v \neq w \\ v, w \sim x}} (f^2(v) + f^2(w)) - \sum_{\substack{v \neq w \\ v, w \sim x}} 2f(v)f(w) \\
&\quad + \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{\substack{v \neq w \\ v, w \sim x}} 2f(v)f(w) \\
&\quad + (2-n) \sum_{v \sim x} f^2(v) \\
&= 2 \sum_{v \sim x} f^2(v) = 4\Gamma(f)(x).
\end{aligned}$$

Quindi $Ric(H_n) \geq 2$, e dal teorema 3.3.1 possiamo concludere che $Ric(H_n) = 2$. \square

4.2 Tetraedro

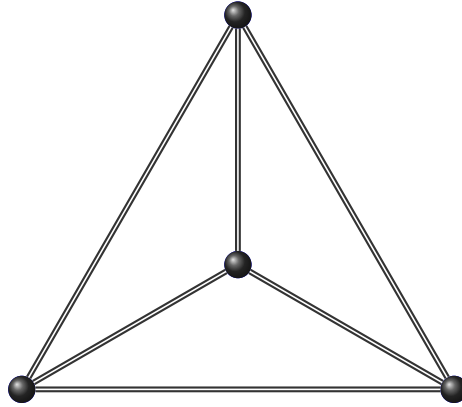


Figura 4.2: grafo del tetraedro.

Teorema 4.2.1. *Sia T il grafo rappresentante il tetraedro allora $Ric(T)=3$.*

Dimostrazione. Il grafo del tetraedro è ovviamente isomorfo al grafo completo K_4 . Mostriamo che $Ric(K_n) = 1 + \frac{n}{2}$ se $n \geq 2$ da cui la tesi.

Considerato il grafo completo su n vertici, per ogni $x \in V$ e ogni $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
2\Gamma_2(f)(x) &= \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + (3-n) \sum_{v \sim x} f^2(v) \\
&\quad + \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} \left[2(f(v) - f(u))^2 + \frac{1}{2}(f^2(u) + f^2(v)) \right].
\end{aligned}$$

Sviluppando la precedente espressione

$$\begin{aligned}
2\Gamma_2(f)(x) &= \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} 2f(u)f(v) + (3-n) \sum_{v \sim x} f^2(v) \\
&\quad + \frac{5}{2} \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} (f^2(v) + f^2(u)) - \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} 4f(v)f(u) \\
&= (4-n) \sum_{v \sim x} f^2(v) + \frac{5}{2}(n-2) \sum_{v \sim x} f^2(v) - 2 \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} f(u)f(v) \\
&= \left(\frac{3n}{2} - 1\right) \sum_{v \sim x} f^2(v) - 2 \sum_{\substack{u \neq v \\ u, v \sim x}} f(u)f(v) \\
&= \frac{3n}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) - \left(\sum_{v \sim x} f(v)\right)^2,
\end{aligned}$$

dove la prima uguaglianza è giustificata dal fatto che $\sum_{u,v} f^2(v) + f^2(u)$ conta $f^2(v)$ una volta per ogni $u \neq x, v$.

Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, $(\sum_{v \sim x} f(v))^2 \leq |\{v : v \sim x\}| \sum_{v \sim x} f^2(v) = (n-1) \sum_{v \sim x} f^2(v)$, quindi

$$\frac{3n}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) - \left(\sum_{v \sim x} f(v)\right)^2 \geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) \sum_{v \sim x} f^2(v).$$

Si ha $Ric(K_n) \geq 1 + \frac{n}{2}$, e ancora una volta dal teorema 3.3.1, possiamo concludere che $Ric(K_n) = 1 + \frac{n}{2}$. \square

4.3 Ottaedro

Osservazione 3. Ricordiamo che il grafo $G = (V, E)$ con $V = \{x \in \{0, 1\}^n : \sum_i x_i = k\}$ e $x \sim y$ se $|supp(x - y)| = 2$ è detto k -faccia dell'ipercubo n -dimensionale e verrà indicato con H_n^k .

Teorema 4.3.1. *Sia O il grafo rappresentante l'ottaedro allora $Ric(O) = 3$.*

Dimostrazione. Il grafo dell'ottaedro è isomorfo alla 4-faccia dell'ipercubo H_4 . Mostriamo che $Ric(H_n^k) = 1 + \frac{n}{2}$ da cui la tesi.

Sia $x \in V$. Indichiamo con $s_{ij}x$ il vertice ottenuto scambiando le coordinate i e j in x . Un vertice u con $d(x, u) = 2$ sarà $u = s_{ij}s_{lm}x$ per alcune coordinate distinte i, j, l, m con $x_i = x_l = 1, x_j = x_m = 0$. I vertici v con $x \sim v \sim u$ sono $s_{ij}x, s_{im}x, s_{lj}x, s_{lm}x$.

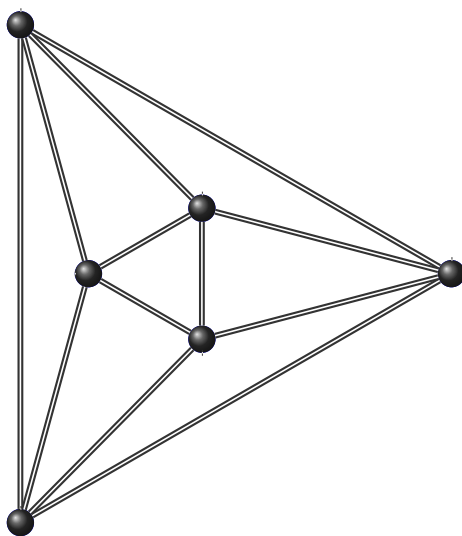


Figura 4.3: grafo dell'ottaedro.

Osserviamo che

$$\sum_{v:x\sim v\sim u} (f(u) - 2f(v))^2 \geq 2(f(s_{ij}x) - f(s_{lm}x))^2 + 2(f(s_{im}x) - f(s_{lj}x))^2,$$

dove la precedente disuguaglianza è giustificata dal fatto che $0 \leq (-x + y + z)^2 = 1/2((x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 - 2(y - z)^2)$.

Sommando su tutti i vertici u con $d(x, u) = 2$ si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{x\sim v\sim u \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 \geq \sum_{\substack{v,w\sim x \\ \Delta(xvw)}} (f(v) - f(w))^2,$$

dal momento che per ogni coppia $v, w \sim x$ con $v \not\sim w$, c'è esattamente un u con $v, w \sim u$ e $d(x, u) = 2$.

Inoltre notiamo che per ogni $v \sim x$ si ha $t(\{x, v\}) = n - 2$, ovvero esistono $n - 2$ triangoli distinti aventi per lato l'arco xv : se $v = s_{ij}x$, i vertici che formano un triangolo con x e v sono s_{lj} quando $l \neq i$ e $x_l = x_i$, e quando $m \neq j$ e $x_m = x_j$. È importante convincersi che il parametro l assume $\frac{n-2}{2}$ valori distinti.

Ora possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
& 2\Gamma_2(f)(x) \\
& \geq \sum_{\substack{v,w \sim x \\ \Delta(xvw)}} (f(v) - f(w))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + \left(2 - d + \frac{n}{2} - 1 \right) \sum_{v \sim x} f(v)^2 \\
& \quad + 2 \sum_{\Delta(xvw)} (f(v) - f(w))^2 \\
& \geq \sum_{v,w \sim x} (f(v) - f(w))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + \left(1 - d + \frac{n}{2} \right) \sum_{v \sim x} f(v)^2 \\
& = (d-1) \sum_{v \sim x} f(v)^2 - 2 \sum_{v,w \sim x} f(v)f(w) + \sum_{v \sim x} f(v)^2 + 2 \sum_{v,w \sim x} f(v)f(w) \\
& \quad + \left(1 - d + \frac{n}{2} \right) \sum_{v \sim x} f(v)^2 \\
& = \left(1 + \frac{n}{2} \right) \sum_{v \sim x} f(v)^2.
\end{aligned}$$

Quindi $\text{Ric}(H_n^k) \geq 1 + \frac{n}{2}$. Ancora una volta dal teorema 3.3.1 possiamo concludere che $\text{Ric}(H_n^k) = 1 + \frac{n}{2}$. \square

4.4 Icosaedro

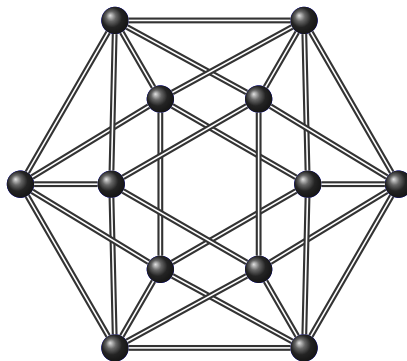


Figura 4.4: grafo dell'icosaedro.

Teorema 4.4.1. *Sia I il grafo rappresentante l'icosaedro allora $\text{Ric}(I) = \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}$.*

Dimostrazione. Per chiarire i vari passaggi della dimostrazione conviene fissare un vertice x , colorare di verde i vicini di x chiamandoli v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

e colorare di rosso i vertici a distanza 2 da x chiamandoli u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 , come mostrato in Figura 4.5.

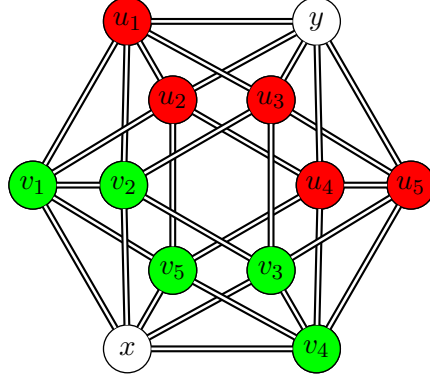


Figura 4.5: schema per la dimostrazione.

Innanzitutto notiamo che vale la seguente minorazione

$$\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} \sum_{\substack{u \sim v \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 \geq \sum_{\Delta(x,v,u)} 2(f(v) - f(u))^2, \quad (4.1)$$

infatti fissato uno dei nodi a distanza 2, ad esempio u_1 , si ha

$$(f(u_1) - 2f(v_1))^2 + (f(u_1) - 2f(v_2))^2 \geq 2(f(v_1) - f(v_2))^2, \quad (4.2)$$

dove la precedente disuguaglianza, come già chiarito, è giustificata dal fatto che $0 \leq (-x + y + z)^2 = 1/2((x - 2y)^2 + (x - 2z)^2 - 2(y - z)^2)$.

Ripetendo il ragionamento per gli altri vertici a distanza 2 e sfruttando le simmetrie tra triangoli (ad esempio il termine $2(f(v_1) - f(v_2))^2$ in (4.2) corrisponde all'addendo della sommatoria $\sum_{\Delta(x,v,u)} 2(f(v) - f(u))^2$ in (4.1) data dal triangolo di vertici x, v_1, v_2) si ha quanto affermato in (4.1).

È importante notare, per un successivo risultato, che fissati i seguenti valori di f sui secondi vicini, $f(u_i) = \sum_{v_j: x \sim v_j \sim u_i} f(v_j)$ per ogni i , si ha uguaglianza in (4.1) e tale assunzione non pone alcun vincolo ai valori di f sui primi vicini di x .

È banale verificare che vale

$$\begin{aligned} & \sum_{\Delta(x,v,u)} \left[2(f(v) - f(u))^2 + \frac{1}{2}(f^2(v) + f^2(u)) \right] \\ &= \sum_{\Delta(x,v,u)} 2(f(v) - f(u))^2 + \sum_{v \sim x} f^2(u). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Per quanto affermato in (4.1) e (4.3) e ricordando che $d(v) = 5$ per ogni vertice dell'icosaedro possiamo concludere che

$$2\Gamma_2(f)(x) \geq -\sum_{v \sim x} f^2(v) + 2 \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) + 4 \sum_{\Delta(x, v, u)} (f(v) - f(u))^2.$$

Cerco il massimo K tale che per ogni scelta di f e x si abbia

$$-\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) + 2 \sum_{\Delta(x, v, u)} (f(v) - f(u))^2 \geq K \left(\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) \right).$$

Ora fissando in v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 i valori di f pari a x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 si ha

$$\begin{aligned} & 2 \left(-\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) + \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) + 2 \sum_{\Delta(x, v, u)} (f(v) - f(u))^2 \right) = \\ & -(x_1^2 + \dots + x_5^2) + 2(x_1x_2 + \dots + x_4x_5) + 4((x_1 - x_2)^2 + \dots + (x_5 - x_1)^2) \\ & = 7(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ & \quad + 2(x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5). \end{aligned}$$

Quest'ultima è l'espressione di una forma bilineare definita positiva, la cui matrice associata è

$$Q = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 7 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Per determinare K è sufficiente determinare

$$\inf_{\bar{x}} \left\{ \frac{\bar{x}^t Q \bar{x}}{\bar{x}^t \bar{x}} \right\},$$

dove \bar{x} rappresenta il vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Quanto cercato coincide con il minimo autovalore della matrice Q pari a $\frac{13}{2} - \frac{\sqrt{65}}{2}$, infatti effettuando un opportuno cambio di base per scrivere Q in forma diagonale e ponendo $\lambda = \min_i \{ \lambda_i \mid \lambda_i \text{ è autovalore di } Q \}$ si ha

$$\frac{\bar{x}^t Q \bar{x}}{\bar{x}^t \bar{x}} = \lambda + \frac{\sum_i (\lambda_i - \lambda) y_i^2}{\sum_i y_i^2},$$

dove l'ultimo addendo è sempre positivo.

Ad una prima lettura potrebbe risultare che quanto trovato sia semplicemente un lower bound per la costante K , ma come precedentemente fatto notare possiamo avere uguaglianza in (4.1) e ciò permette di concludere. \square

4.5 Dodecaedro

Prima di occuparci del calcolo della curvatura del dodecaedro ricordiamo alcune definizioni e risultati.

Definizione 4.5.1. Il **grafo di Cayley** di un gruppo G rispetto a un dato insieme S che genera G è il grafo i cui vertici sono gli elementi di G e i cui archi sono $\{(g, gs)\}_{g \in G, s \in S}$.

Dal momento che siamo interessati a grafi non orientati, S deve essere simmetrico, ovvero $s \in S \Rightarrow s^{-1} \in S$.

Teorema 4.5.1. *Sia X un gruppo abeliano finitamente generato, e S un insieme di generatori per X . Sia G il grafo di Cayley corrispondente a X e S . Allora $Ric(G) \geq 0$.*

Il calcolo della curvatura del dodecaedro è di particolare rilevanza tra i cinque grafi considerati, essendo l'unico grafo platonico ad avere curvatura negativa. Tale risultato è giustificato dal fatto che il dodecaedro è l'unico grafo platonico non di Cayley. Forniamo di seguito una semplice ma efficace dimostrazione di tale fatto.

Lemma 4.5.2. *Il dodecaedro non è un grafo di Cayley.*

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che non esiste un gruppo G ed un generatore S simmetrico che rendano il dodecaedro un grafo di Cayley.

Essendo $d(v) = 3$ per ogni $v \in V$ allora $|S| = 3$. Si presentano i seguenti due casi:

1. Due elementi di S sono l'uno l'inverso dell'altro e il terzo elemento è inverso di se stesso;
2. Tutti e tre gli elementi di S sono l'inverso di se stessi.

Caso 1: $S = \{R, R^{-1}, B\}$, B tale che $B^2 = 1$.

Coloriamo di blu gli archi corrispondenti a B (per ogni nodo esiste un unico arco B incidente) e i restanti archi li coloriamo di rosso come ad esempio mostrato in Figura 4.6.

Affermiamo che esiste una faccia del dodecaedro con quattro archi rossi e uno blu. Infatti essendoci dieci archi blu non si possono colorare gli archi in modo da avere due archi blu su ciascuna delle 12 facce (ovvio) e neppure una faccia con soli archi rossi (lo chiariremo a breve). Quindi la prima parte della colorazione sarà obbligata come mostra la Figura 4.7.

Si ha la relazione $RRRR = B$ ovvero $R^8 = B^2 = 1$ e quindi R è un elemento di ordine 8. È importante notare che R non può avere ordine 4, altrimenti i quattro archi rossi chiuderebbero un ciclo. Questo è assurdo perché 8 non divide l'ordine del gruppo pari a 20.

Ci resta da verificare che non esiste alcuna colorazione ammissibile che presenti una faccia con soli archi rossi. Per assurdo supponiamo ve ne sia una,

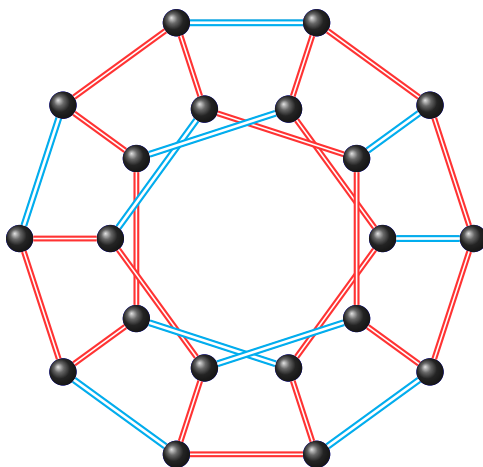


Figura 4.6: esempio di colorazione del caso 1.

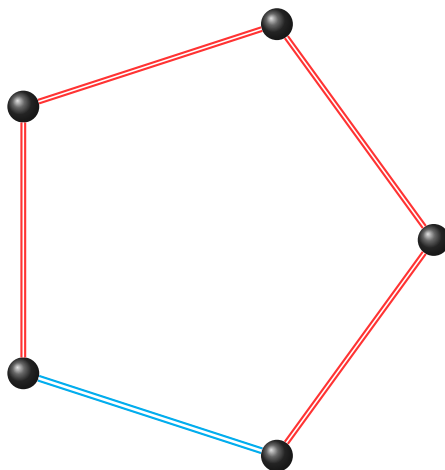


Figura 4.7: faccia del dodecaedro nel caso 1.

allora senza perdere di generalità la prima parte della colorazione sarà come quella mostrata in Figura 4.8. Ma questa colorazione è assurda perché ho un ciclo rosso di lunghezza 10 e invece, dal momento che $R^5 = 1$, ogni ciclo deve avere lunghezza 5.

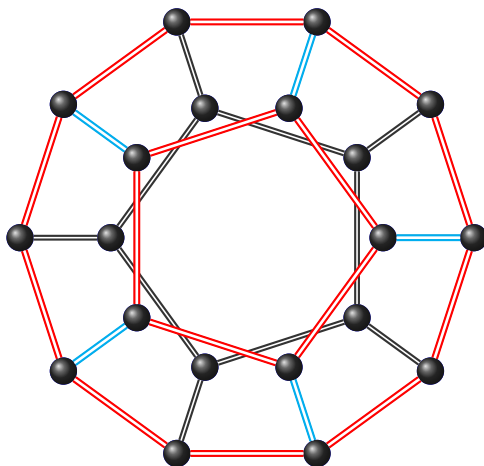


Figura 4.8: colorazione assurda con una faccia con soli archi rossi.

Caso 2: $S = \{R, V, C\}$, R, B, V tali che $R^2 = B^2 = V^2 = 1$.

Coloriamo di rosso gli archi R , di blu gli archi B e di verde gli archi V in modo da avere gli archi incidenti ad ogni vertice colorati con 3 colori distinti. Forniamo un esempio in Figura 4.9.

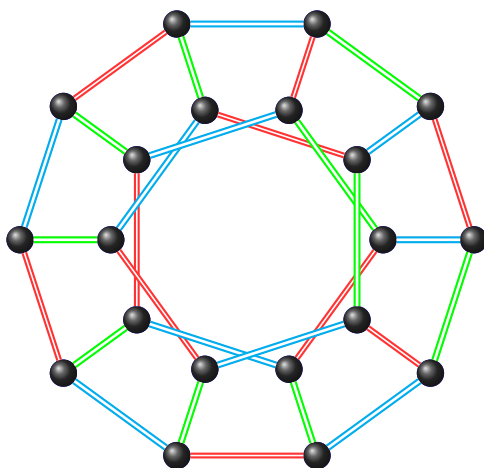


Figura 4.9: esempio di colorazione del caso 2.

Su ciascuna faccia avremo tutti e tre i colori presenti una o due volte. Senza perdere di generalità fissiamo il colore blu. Sono presenti 10 archi di

colore blu e 12 facce quindi esiste una faccia in cui compare una sola volta il blu. A meno di percorrere il ciclo in senso opposto la situazione sarà quella mostrata in Figura 4.10.

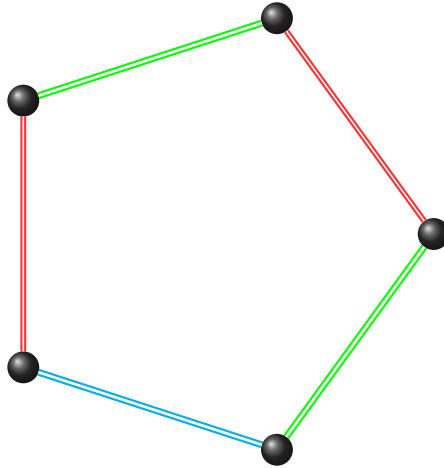


Figura 4.10: faccia del dodecaedro con un solo arco blu.

Otteniamo così la relazione $B = RVRV$. Ripetendo lo stesso ragionamento fissando il colore rosso, come mostrato in Figura 4.11 otteniamo la relazione $B = RVBV$.

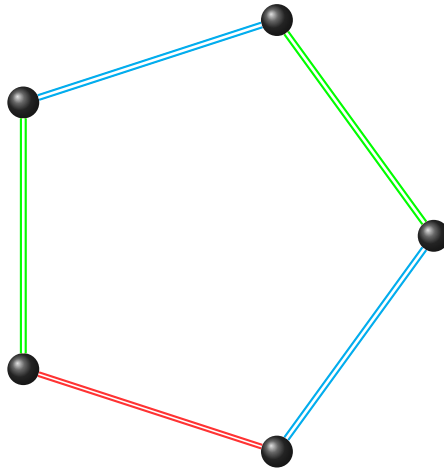


Figura 4.11: faccia del dodecaedro con un solo arco rosso.

Si ha $RVRV = RVBV$ ovvero $R = B$ ottenendo così un assurdo. \square

Teorema 4.5.3. *Sia D il grafo rappresentante il Dodecaedro allora $Ric(D) = -1$.*

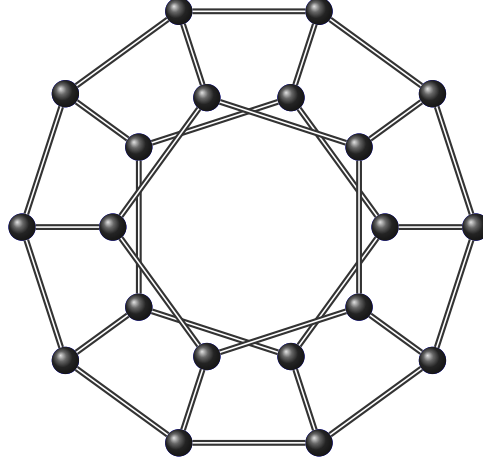


Figura 4.12: grafo del dodecaedro.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che il dodecaedro non contiene triangoli e ogni vertice ha grado 3.

$$\begin{aligned}
 2\Gamma_2(f)(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 + \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 + \sum_{v \sim x} \left(\frac{4-3-3}{2} \right) f^2(v) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 + \sum_{v \sim x} f^2(v) + 2 \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) - \sum_{v \sim x} f^2(v) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 + 2 \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v)
 \end{aligned}$$

Ora $2\Gamma_2(f)(x)$ è maggiorato fissando $f(u) = 2f(v)$ per ogni $u \sim v \sim x$ e $d(x, u) = 2$ ottenendo

$$\frac{1}{2} \sum_{\substack{u \sim v \sim x \\ d(x,u)=2}} (f(u) - 2f(v))^2 = 0.$$

Si ha quindi

$$\Gamma_2(f)(x) \geq \sum_{\substack{u, v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v).$$

Ora cerchiamo il massimo K tale che

$$\sum_{\substack{u,v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) \geq K \left(\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v) \right),$$

cioè

$$K = \inf_{f,x} \left\{ \frac{\sum_{\substack{u,v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v)}{\frac{1}{2} \sum_{v \sim x} f^2(v)} \right\}.$$

Per determinare K sfruttiamo che per ogni scelta di f e x

$$2 \sum_{\substack{u,v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v) + \sum_{v \sim x} f^2(v) = \left(\sum_{v \sim x} f(v) \right)^2 \geq 0,$$

allora

$$\frac{2 \sum_{\substack{u,v \sim x \\ u \neq v}} f(u)f(v)}{\sum_{v \sim x} f^2(v)} \geq -1,$$

e si ha uguaglianza fissando i valori di f sui vicini di x in modo da ottenere $\sum_{v \sim x} f(v) = 0$. Concludo che $K = -1$. \square

Bibliografia

- [1] Bo'az Klartag, Gady Kozma, Peter Ralli and Prasad Tetali. Discrete curvature and abelian groups. January 2, 2015.
- [2] P. Diaconis and L. Saloff-Coste. Logarithmic Sobolev inequalities for finite Markov chains. *The Annals of Applied Probability*, Volume 6, Number 3 (1996), 695-750.
- [3] P. Bremaud. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulations and Queues*. Springer.